COURS DE MATHEMATIQUES

CHAPITRE n°1

Travail de vacances

PRESENTATION

Chers futurs élèves,

Je me présente, je suis monsieur Sauvage, votre futur enseignant en mathématiques pour l'année 2024-2025.

Je tiens à vous souhaiter la bienvenue en CPGE et dans ma classe tout particulièrement. Nous travaillerons ensemble pour que vous puissiez donner le meilleur de vous-même, sans jamais oublier l'optique des concours qui représentent la finalité des deux années de prépas. Comme vous le verrez très vite, la classe préparatoire vous demandera beaucoup de votre temps et de votre énergie, mais elle vous apportera aussi une expérience extrêmement enrichissante. J'attends de vous du sérieux, du travail, de l'écoute et de l'investissement. Mais je ne doute pas que vous saurez faire preuve de tout cela.

ORGANISATION DE LA MATIERE

L'enseignement des mathématiques représente une part importante du programme en ECG1. L'enseignement des mathématiques en première année se répartit comme suit :

- ✓ 6h de cours,
- ✓ 2h de TD,
- ✓ 1h de TP d'informatique en Python,
- ✓ auxquels viendront se rajouter 1h de colle toutes les deux semaines, quelques devoirs de 4h, 2 concours blanc et des petits contrôles réguliers.

Le programme de mathématiques en ECG1, comme vous le verrez, fait intervenir à la fois de l'algèbre (logique et raisonnement, calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires, espaces vectoriels et applications linéaires), de l'analyse (suites de nombres réels, fonctions réelles d'une variable réelle, calcul intégral et équations différentielles, étude élémentaire des séries) ainsi que des probabilités (probabilités sur un univers fini, variables aléatoires discrètes, statistiques) qui représentent une partie importante du programme.

PRE-REQUIS

Les rappels évoqués dans ce document vous feront réviser les notions importantes de calculs (opérations sur les fractions, identités remarquables, dérivation…). Et ce afin que vous vous assuriez que ces points ne vous posent pas de problèmes (dans le cas contraire il vous faudra les travailler pendant l'été) et que vous puissiez partir sur de bonnes bases dès la rentrée de septembre.

DES REFERENCES

Il n'y a pas de livres spécifiques à acheter en maths, car le cours polycopié, les feuilles de TD, les devoirs, les dms distribués pendant l'année se suffisent à eux-mêmes.

Si vous désirez acheter un ouvrage pour préparer efficacement votre rentrée, je vous conseille le livre suivant :

Mathématiques-Réviser et consolider les bases de Terminale pour réussir la 1re année d'ECG-Complément Python-2e édition

Editeur : Ellipse (prix : 19 €)

<u>Une cession de remise à niveau en mathématiques aura lieu au lycée Carnot – Gambetta</u>.

<u>Volume</u> : 16 heures réparties comme suit : du lundi 26 août au jeudi 29 août (10h – 12h et 13h30 – 15h30).

Les deux premières séances seront assurées par moi-même.

Le deux séances suivantes seront assurées par Mr ANAKKAR : le professeur de maths en ECG2

CONCLUSION

Tout cela vous sera bien sûr expliqué plus en détails à la rentrée.

Reposez-vous bien aussi pendant les vacances pour commencer l'année en forme en septembre. En attendant de faire votre connaissance à la rentrée prochaine, je vous souhaite de belles vacances.

SAUVAGE JEROME

Le document qui suit est construit de la manière suivante : j'ai mis l'ensemble des bases qui me semblent importantes de maîtriser pour bien commencer l'année en ECG. Pour chacune des notions importantes, j'ai mis des rappels de cours, des exemples pour les illustrer ainsi que des petits exercices de mise en application directe du cours. Je vous demande de chercher et rédiger ces exercices sur feuille La correction se trouve en fin de polycopié. Cela vous permettra ainsi d'avoir une idée de votre niveau, de vous indiquer les notions que vous maîtrisées et au contraire, celles qui vous posent des difficultés. Nous prendrons un peu de temps à la rentrée pour faire des "révisions" de Terminale. Je mets le mot "révisions" entre parenthèse car je sais bien qu'avec les différences de programme et de niveau entre la spécialités maths et les maths complémentaires, il y a sans doute des points qui auront été très partiellement vu au lycée pour certains d'entre vous. Ce sera ainsi l'occasion de remettre tout le monde à niveau. Même s'il y a des points dans ce document qui ne vous parle pas plus que ça, essayer de les travailler le maximum en autonomie pendant les vacances en travaillant et apprenant les points de cours et en vous inspirant des exemples. Vous serez ainsi plus à l'aise à la rentrée. Faites les calculs de tête ou au brouillon mais à la main, car la calculatrice est interdite en prépa, comme le jour du concours.

Bon travail !

Sommaire

PARTIE 1 : GENERALITES

1. Les nombres

1.1 Les ensembles de nombres

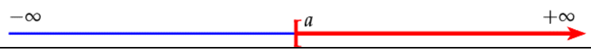
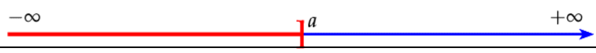
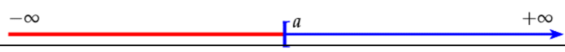
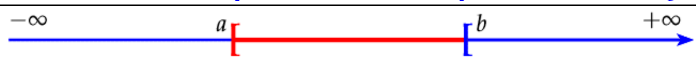
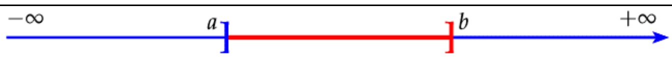
Tout au long de l'année, nous manipulerons des variables numériques et il est important d'en connaître la nature. Les ensembles de nombres les plus courants possèdent des notations spécifiques qu'il faudra maîtriser au plus vite.

- ♥ **Les entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et les entiers naturels **non nuls** : $\mathbb{N}^*$
- ♥ **Les réels** : $\mathbb{R}$ ou l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$ et les réels **non nuls** : $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
- ♥ **Les réels positifs** : $\mathbb{R}_+$ et **les réels strictement positifs** : $\mathbb{R}_+^*$
- ♥ **Les réels négatifs** : $\mathbb{R}_-$ et **les réels strictement négatifs** : $\mathbb{R}_-^*$

Par exemple, si n est une variable donnée, on écrira $n \in \mathbb{N}$ pour signifier que n est un entier naturel.

- ♥ Ecrire $x \in \mathbb{R}_+$ revient à écrire $x \geq 0$ qui revient à écrire $x \in [0\,;+\infty[$.
- ♥ Ecrire $x \in \mathbb{R}_+^*$ revient à écrire $x > 0$ qui revient à écrire $x \in]0\,;+\infty[$.
- ♥ Ecrire $x \in \mathbb{R}_-$ revient à écrire $x \leq 0$ qui revient à écrire $x \in]-\infty\,;0]$.
- ♥ Ecrire $x \in \mathbb{R}_-^*$ revient à écrire $x < 0$ qui revient à écrire $x \in]-\infty\,;0[$.

1.2 Les intervalles : un « **intervalle** » est l'ensemble des réels compris entre deux « **bornes** » éventuellement infinies. Une représentation graphique permet souvent de simplifier les choses ou encore de mieux les visualiser.

L'intervalle	« est l'ensemble des réels x vérifiant … »	Représentation graphique
$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a\,;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty\,;a]$	$x \leq a$	
$]-\infty\,;a[$	$x < a$	
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a\,;b[$	$a < x < b$	
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	
$]a\,;b]$	$a < x \leq b$	

- **La réunion des intervalles** : I et J notée $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui sont dans I **ou** dans J.

Exemple : l'ensemble des réels x vérifiant : $x < 2$ **ou** $x \geq 5$.

L'ensemble visualisé s'écrit : $]-\infty\,; 2[\, \cup\, [5\,;\, +\infty[$.

- **L'intersection des intervalles** I et J notée $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui sont dans I **et** dans J.

2. Bien s'exprimer en maths

La bonne maîtrise des calculs est un objectif primordial cette année. Pour cela, il est important de bien s'exprimer quand il s'agit de donner une description d'une expression algébrique.

Soient A et B deux nombres réels.

- **Somme de A et de B** : A + B — **Différence de A et de B** : A – B — **Opposé de A** : - A
- **Produit de A par B** : A × B — **Carré de A** : A² — **Cube de A** : A³
- **Quotient de A par B** : $\frac{A}{B}$ — **Inverse de B** : $\frac{1}{B}$
- **Racine carrée de A** : $\sqrt{A}$
- **Exponentielle de A** : e^A — **Logarithme de A** : ln(A)

3. Puissances entières d'un nombre réel

On rappelle que si x est un réel et n un entier naturel non nul alors : $x^n = x \times x \times \ldots \times x$ est le produit de n facteurs tous égaux à x

Par convention : si $x \neq 0, x^0 = 1$.

Puissance dont l'exposant est négatif : pour $x \neq 0, x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ **Exemple** : $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Proposition : **opérations sur les puissances**

Pour tous réels a, b et tous entiers relatifs n, m on a : $a^n \times a^m = a^{n+m}$ et $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

On a aussi : $(a^m)^n = a^{m \times n}$, $(ab)^n = a^n \times b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$.

4. Développer et factoriser

Définition n°1 : « **développer** » c'est transformer un produit en une somme ou une différence, tandis que « **factoriser** », c'est transformer une somme ou une différence en produit.

Rappellons les bonnes vieilles **égalités remarquables** : a et b deux réels alors :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exercice n°1 : **développer** les expressions suivantes : $A = (2x^2 + 3x + 3)(x + 1)$ puis $B = (-2 + x)^2$ puis $C = (3x + 1)^2 - (x + 2)^2$, $D = (1 + x)^2 + (1 + x)(1 - x)$, $E = (a + b)^3$ et $F = (a - b)^3$.

Exercice n°2 : **factoriser** les expressions suivantes : $A = (x + 2)(3x^2 + 1) - (x + 1)(x + 2)$, $B = x^2 - 16 + 3(x - 4)$ et $C = (x - 1)^2 - (x - 1)(x + 3)$.

5. Calculs sur les quotients

Un quotient $\frac{n(x)}{d(x)}$ **existe** à condition que :

1) Le numérateur n(x) existe ;
2) Le dénominateur d(x) existe ;
3) Le dénominateur est non nul : $n(x) \neq 0$.

S'intéresser à l'existence c'est déterminer le « **domaine de définition** », c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquelles le quotient est calculable, a un sens.

Exercice n°3

1. Déterminer l'ensemble de définition des quotients : $\frac{x+1}{x^2-4}$ et $\frac{\sqrt{x}}{x-5}$.
2. Simplifier $3 \times \frac{2x+7}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
3. Développer $(x - 1)(x + 5)$ et $(x - 1)(x - 2)$ puis simplifier pour $x \in \mathbb{R} - \{1,2\}$, le quotient $\frac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2}$.
4. Par **une mise au même dénominateur**, simplifier les expressions suivantes :

   4a. Pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x-1}$

   4b. Pour $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x}$

   4c. Pour $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$

☠ **Attention aux simplifications hasardeuses** : $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$, $\frac{c+a}{c+b} \neq \frac{a}{b}$ $\frac{a+d}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{d}{c}$

6. Equations

Lorsqu'on résout une équation, on commence toujours par réfléchir au « **domaine de définition** » de cette équation, c'est à dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation est bien définie. Dans les situations les plus simples, le domaine de définition est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier. Cependant, une équation peut montrer la présence d'un quotient, d'une racine carrée, d'un logarithme et au cas par cas, **il faut étudier la présence d'éventuelles valeurs interdites**.

METHODE : quand on résout une équation,

1) On observe de près son domaine de définition (pour $x \in \cdots$)
2) On la résout en indiquant toutes les étapes de calcul.
3) On conclut en disant : l'ensemble solution est : S = …

Exercice n°4 : résoudre les équations suivantes :

1. $3x + 6 = 0$
2. $-x + 5 = 4x + 2$
3. $x^2 + x + 2 = (x - 1)(x + 2)$
4. $x^2 + x = x(x + 1)$.

Définition n°2 : une équation est dite « **polynômiale de degré 2** » si on peut l'écrire de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ où } a, b, c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le « **discriminant** ».

Proposition : **résolution d'une équation polynômiale de degré 2**

✓ Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **ne possède pas de solution réelle.**

✓ Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède pour **unique** solution le réel $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

✓ Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **possède deux solutions réelles distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exercice n°5 : résoudre les équations suivantes : $2x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$.

Exercice n°6 : résoudre l'équation : $x^2 + mx + 1 = 0$ suivant les valeurs du réel m.

Attention ! Le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire !

Exemple : si on tombe sur l'équation : $x^2 - 4 = 0$, on reconnaît une « **égalité remarquable** ».

$x^2 - 4 = 0 \iff (x - 2)(x + 2) = 0 \underbrace{\iff}_{PPN} x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$. Finalement, $S = \{-2 , 2\}$.

On peut aussi écrire : $x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Proposition : **cas particulier de l'équation : x^2 = truc**

1) Si truc < 0 alors l'équation : x^2 = truc n'a pas de solution réelle.

2) Si truc = 0 alors l'équation : $x^2 = 0$ admet 0 pour unique solution.

3) Si truc > 0 alors l'équation : x^2 = truc admet deux solutions à savoir : $x = \pm\sqrt{truc}$.

Exercice n°7 : résoudre les équations : $x^2 + 6 = 0$, $x^2 - 3 = 0$ et $(2x - 3)^2 = 25$.

Exercice n°8 : résoudre les équations « **bicarrées** » : $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$ et $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

✍ **Définition n°3** : une équation « **produit** » est une équation du type : $A(x) \times B(x) = 0$.

On résout aisément ce type d'équation via la « **propriété du produit nul** », PPN en abrégé.

PPN : « **pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul** ».

Autrement dit, $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ **ou** $B(x) = 0$.

Exercice n°9 : résoudre les équations suivantes : $x(x - 1) + (x + 4)(x - 1)^2 = 0$

$x^2(x + 1) = x(x^2 - 1)(2x + 1)$ et enfin $3(x + 1)(x + 3) = (x + 3)^2$.

✍ **Définition n°4** : une équation « **quotient** » est une équation du type : $\frac{n(x)}{d(x)} = 0$.

METHODE : **on détermine l'ensemble de définition noté D** : $n(x)$ existe et $d(x)$ existe et $d(x) \neq 0$.

Pour tout réel x de D on a : $\frac{n(x)}{d(x)} = 0 \Leftrightarrow n(x) = 0$.

Exercice n°10 : résoudre les équations suivantes : $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3$, $\frac{x-4}{x+4} = 0$, $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2}$

7. Inéquations

Rappelons qu'une « **inégalité** » est un énoncé permettant de comparer l'ordre de deux quantités.

L'écriture $a < b$ est une **inégalité stricte** alors que : l'écriture $a \leq b$ est une **inégalité large**.

- Dans une inégalité, on peut **ajouter ou retrancher** une même quantité q à chaque membre.
- Dans une inégalité, on peut **multiplier ou diviser** chaque membre par un réel k non nul

  mais en prenant des précautions : ☠

  ✓ Si k > 0 le sens de l'inégalité reste intact

  ✓ Si k < 0 le sens de l'inégalité change.

Lorsqu'on résout une inéquation, on commence toujours par réfléchir au « **domaine de définition** »

pour déceler la présence d'éventuelles valeurs interdites.

METHODE : quand on résout une inéquation,

1) On observe de près son domaine de définition (pour $x \in \cdots$)
2) On la résout en indiquant toutes les étapes de calcul.
3) On conclut en disant : l'ensemble solution est : $S = \cdots$

Exercice n°11 : résoudre les inéquations : $2x + 1 < 0$ puis $-6x + 3 \leq 0$.

Définition n°5 : une inéquation est dite « **polynômiale de degré 2** » si on peut l'écrire de la forme :

$ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$.

où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$

Proposition : **résolution d'une inéquation polynômiale de degré 2**

Si $\Delta \leq 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a.

Cas $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

Cas $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Si $\Delta > 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a lorsque x est à l'extérieur des racines et il est du signe de -a lorsque x est situé à l'intérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

Exercice n°12 : résoudre les inéquations : $x^2 + x + 1 < 0$ et $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ et $x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

Exercice n°13 : résoudre l'inéquation : $mx^2 + 4x + 1 \geq 0$ suivant les valeurs du réel m.

Proposition (**cas particulier**) **: soit a un réel positif**

1. $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ et $x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$
2. $x^2 > a \Leftrightarrow x < -\sqrt{a}$ ou $x > \sqrt{a}$ et $x^2 \geq a \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{a}$ ou $x \geq \sqrt{a}$

Exercice n°14 : résoudre les inéquations : $x^2 - 6 \leq 0$, $x^2 + 2x < 2(x + 2)$ et $2x^2 \geq (x + 1)^2 - 2x$.

Définition n°6

- Une inéquation « **produit** » est du type : $A(x) \times B(x) > 0$, $A(x) \times B(x) < 0$. $A(x) \times B(x) \leq 0$ ou encore $A(x) \times B(x) \geq 0$.
- Une inéquation « **quotient** » est du type : $\frac{n(x)}{d(x)} > 0$ ou $\frac{n(x)}{d(x)} \geq 0$ ou $\frac{n(x)}{d(x)} < 0$ ou $\frac{n(x)}{d(x)} \leq 0$.

METHODE

1. On résout aisément une inéquation produit via la PPN et un « **tableau de signes** » faisant apparaître le signe des facteurs A(x) et B(x) et celui du produit A(x) × B(x).
2. On résout aisément une inéquation quotient via un « **tableau de signes** » faisant apparaître le signe du numérateur n(x), celui du dénominateur d(x) et celui du quotient $\frac{n(x)}{d(x)}$.

Exercice n°15 : résoudre les inéquations : $(2x+1)(x+7)(x-3) \geq 0$ et $2x(x+1)^2 < (1-3x)(x+1)^2$, $\frac{x-4}{x+4} > 0$ et $\frac{x+2}{x+1} + 4 \leq \frac{5x}{x+2}$.

PARTIE 2 : LES FONCTIONS

1. Ensemble de définition d'une fonction

Une « **fonction** » f associe à tout réel x associe au plus un réel y = f(x) appelé « **image de x par f** ».

Réciproquement si y est un réel donné, tout réel x vérifiant f(x) = y est un « **antécédent** » de y par f.

Voici un panomrama des **fonctions usuelles** : fonctions polynômes (dont les fonctions affines et les fonctions trinômes du second degré), les fonctions rationnelles, la fonction inverse, la fonction racine carrée, la fonction exponentielle, la fonction logarithme.

✎ **Définition n°7** : si f une fonction donnée, « **l'ensemble de définition de f** » noté D_f est l'ensemble de tous les réels x tels que : f(x) « **existe** » ou est « **calculable** ».

Par la **fonction carré**, tout réel x possède une image y = x^2. Par exemple, l'image de 3 n'est autre que $3^2 = 9$. C'est pourquoi on dit que : « **la fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$** ».	Par la **fonction inverse**, tout réel x **non nul** possède une image y = 1/x. Par exemple, l'image de 3 n'est autre que 1/3 ☠ 0 n'a pas d'image : « **0 est une valeur est interdite !** » C'est pourquoi on dit que : « **la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$** ».

Méthode : pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction,
il faut examiner les conditions qui font que f(x) existe :
- ✓ En cas de quotient, le dénominateur ne peut pas s'annuler.
- ✓ En présence d'une racine carrée, le radicande doit être positif.
- ✓ En présence d'un logarithme, l'intérieur doit être strictement positif.

Rédaction : soit un réel x alors $x \in D_f \Leftrightarrow$ f(x) existe $\Leftrightarrow$ …. Conditions ….

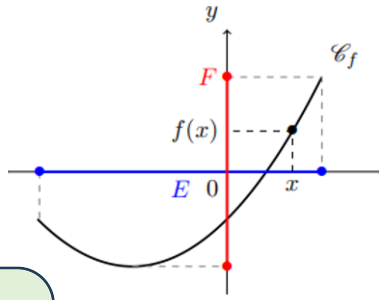
Exercice n°16 : déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$x \mapsto 2x^3 + 4x - 2$, $x \mapsto \frac{2x+4}{x^2-x}$, $x \mapsto x + \ln(x)$, $x \mapsto x^2e^x$, $x \mapsto \frac{e^x}{(x-2)(x-4)}$, $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$, $x \mapsto \sqrt{-x+5}$

Définition n°8 : le plan est muni d'un repère.

Le « **graphe de f** » est l'ensemble C_f des points de coordonnées : $(x , f(x))$

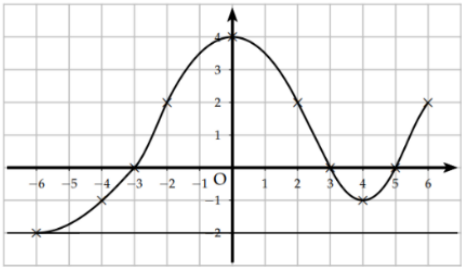
Remarque : graphe, courbe, représentation graphique sont synonymes.



METHODE

- On obtient le domaine de définition de f en projetant le graphe sur l'axe (Ox).
- On obtient l'ensemble des images par f en projetant le graphe sur l'axe (Oy).

Exemple : le graphe ci-contre est celui d'une fonction f.



- Préciser D_f :
- Préciser l'image de 4 par f :
- Préciser les antécédents de y = 2 par f :
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$:
- Quel est l'ensemble des images par f.

2. Signe d'une fonction

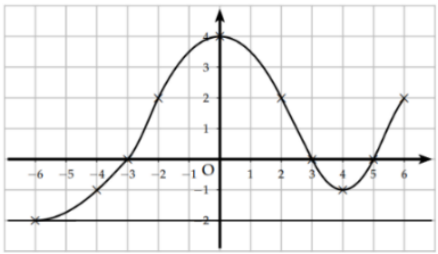
Etudier le « **signe** » d'une fonction f c'est dire sur quelle(s) partie(s) de D, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ et $f(x) = 0$.

Le « **tableau de signe** » permet de synthétiser cette étude.

METHODE : on peut déterminer « **graphiquement** » le signe de f en étudiant la position relative de son graphe par rapport à l'axe des abscisses.

- **« C_f est au-dessus de l'axe (Ox) » $\Leftrightarrow$ $\forall\ x \in D, f(x) > 0$ $\Leftrightarrow$ « f est strictement positive sur D ».**
- **« C_f est en-dessous de l'axe (Ox) » $\Leftrightarrow$ $\forall\ x \in D, f(x) < 0$ $\Leftrightarrow$ « f est strictement négative sur D ».**
- **« C_f coupe l'axe (Ox) » $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ « f s'annule ».**

Exemple : dresser le tableau de signe de la fonction f ci-contre.

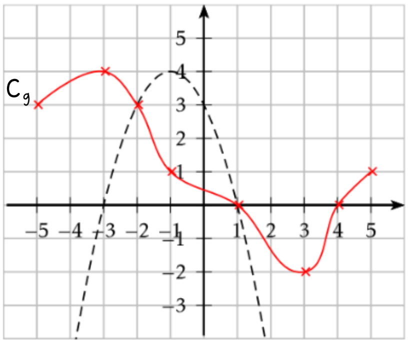


Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D et soient C_f et C_g leurs graphes respectifs.

« **Comparer deux fonction f et g** » c'est dire sur quelle(s) partie(s) de D, $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$ et $f(x) = g(x)$.

METHODE : on compare « **graphiquement** » les fonctions f et g en étudiant la position relative de leurs graphes.

- ♥ « C_f est au-dessus de C_g » $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) > g(x)$.
- ♥ « C_f est en-dessous de C_g » $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) < g(x)$.
- ♥ « C_f coupe C_g » $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$.



Exemple : étudier la position relative des graphes ci-contre.

METHODE : on a les équivalences suivantes : $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$

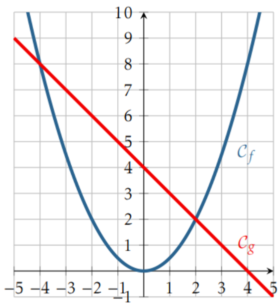
$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0$ et $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.

Par suite, comparer deux fonctions c'est étudier le signe de leur différence.

Le « **tableau de signe** » permet de synthétiser cette étude.

Exercice n°17 : considérons les fonctions $f(x) = \frac{1}{2} x^2$ et $g(x) = - x + 4$.

1. Etudier la position relative de leur graphe sur $\mathbb{R}$.
2. Retrouver vos résultat à l'aide d'un tableau de signes.
3. Colorier les ensembles suivants :
   3a. $A = \{(x, y) \,/\, x \in [-5, 5] \text{ et } y \leq f(x)\}$.
   3b. $B = \{(x, y) \,/\, x \in [-5, 5] \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$.
   3c. $C = \{(x, y) \,/\, x \in [-5, 5] \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}$.

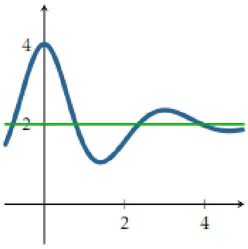


Exercice n°18 : représenter l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant :

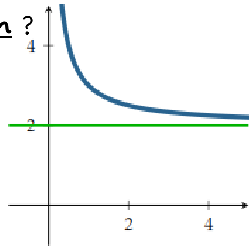
$$X \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 5 \text{ et } x + y \leq 7 \text{ et } 2x + y \leq 10.$$

3. Notions de limites

a. <u>Lecture graphique des limites</u>



Qu'observe-t-on ?

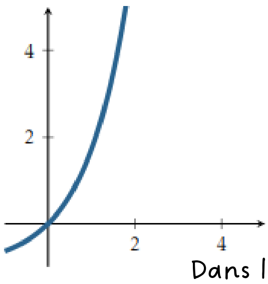


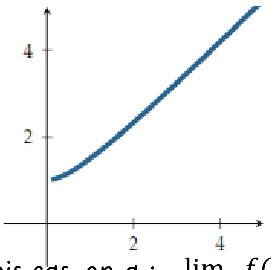
Dans les deux cas, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

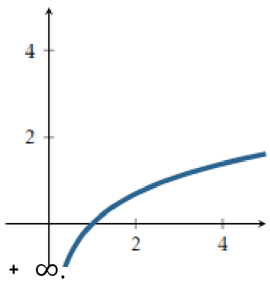
On traduit **graphiquement** le fait que :

> « **C_f possède une asymptote horizontale d'équation y = 2 au voisinage de +∞** ».

Qu'observe-t-on ?

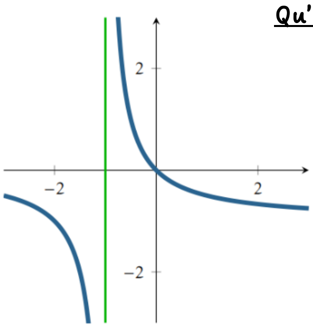


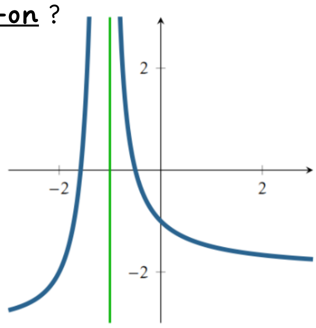




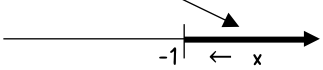
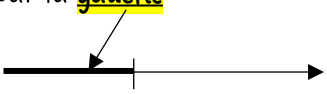
Dans les trois cas, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

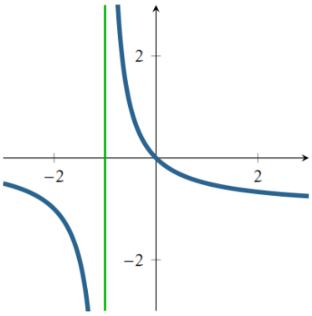
Qu'observe-t-on ?

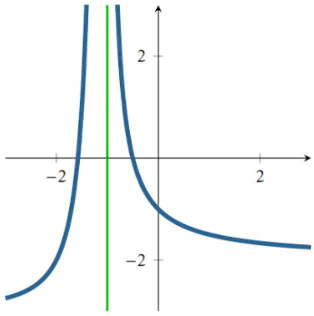




> On traduit **graphiquement** en disant que C_f possède une « **asymptote verticale d'équation x = -1** ».

x tend vers -1, par la **droite**  La limite « **à droite de f en -1** » si elle existe, est la limite de f en -1 mais **avec la contrainte x > -1.** Dans ce cas, cette limite est unique et on note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.	x tend vers -1, par la **gauche**  La limite « **à gauche de f en -1** » si elle existe, est la limite de f en -1 mais **avec la contrainte x < -1.** Dans ce cas, cette limite est unique et on note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$.





☠ Pour le graphe de gauche on a :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

Les limites à gauche et à droite en -1 sont **DIFFERENTES**

f ne possède pas de limite en -1 tout court !

Dans ce cas, **il est proscrit d'écrire : $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \ldots$**

☠ Pour le graphe de droite on a :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

Les limites à gauche et à droite en -1 sont **EGALES**

f possède une limite en -1 tout court !

Dans ce cas, **on peut écrire : $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$.**

b. Calcul de limites

Considérons une fonction f et notons D_f son domaine de définition. Le plus souvent, on est amené à dresser le tableau de variation complet, c'est-à-dire muni des « **limites aux bornes** ».

Domaine de définition	**Limites aux bornes**
$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
$D_f = [0 ; +\infty[$	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$
$D_f =]0 ; +\infty[$	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x)$
$D_f = \mathbb{R} - \{a\}$ $=]-\infty ; a [\cup] a ; +\infty[$	$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to a^-} f(x)$

Les limites se comportent plutôt bien avec les opérations élémentaires sauf dans quelques situations que nous qualifieront de « **formes indéterminées** » : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

☠ Être en présence d'une forme indéterminée ne signifie pas qu'on ne peut pas trouver la limite mais seulement qu'il faut éviter de faire des prédictions trop hasardeuses et surtout qu'il faut utiliser un outil adapté.

Pour les fonctions polynômes ou les fonctions rationnelles, on dispose d'une propriété.

✍ **Proposition** : **limite d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle en l'infini**

- La limite en l'infini d'une **fonction polynôme** est la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une **fonction rationnelle** est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

En présence du mélange (polynôme – exponentielle) ou (polynôme – logarithme) on peut lever les « formes indéterminée » via le théorème de croissances comparées.

Proposition : théorème de croissances comparées

Le principe général est que l'exponentielle est plus puissante que les puissances qui sont elles-mêmes plus puissantes que le logarithme.

- Au voisinage de +∞ on a : si n∈ $\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x)}{x^n} = 0$.
- Au voisinage de 0 on a : si a > 0 : $\lim\limits_{x \to 0} x^n \times ln\,(x) = 0$.
- Au voisinage de -∞ on a : si a > 0 : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^x = 0$.

Exercice n°19 : déterminer la limite en l'infini des fonctions $f(x) = x^3 + 4x + 7$ et $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+7}$.

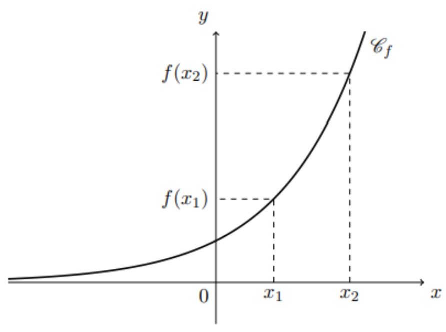
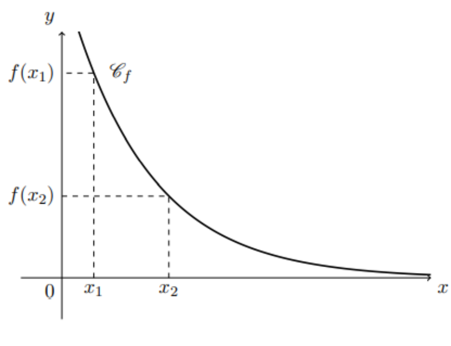
Exercice n°20 : montrer que le graphe des fonctions $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ possède une asymptote horizontale au voisinage de plus et moins l'infini.

Exercice n°21 : considérons les fonctions $f(x) = \frac{2x^2-x}{x-2}$, $g(x) = \frac{e^x+1}{x^2}$.

Déterminer les limites aux points où elles ne sont pas définies. Donner une traduction graphique.

Exercice n°22 : après avoir déterminé leur ensemble de définition, déterminer les limites aux bornes des fonctions suivantes : $f(x) = (x^2 - 5x+7)\, e^x$ et $g(x) = \ln(x) - x$.

4. Variation d'une fonction

Fonctions croissantes	Fonctions décroissantes
 *Graphe d'une fonction croissante*	 *Graphe d'une fonction décroissante*
Dire que f est **croissante** c'est dire que : « **lorsque la variable x augmente, son image f(x) augmente aussi** ».	Dire que f est **décroissante** c'est dire que : « **lorsque la variable x augmente, son image f(x) diminue** ».

On étudie le sens de variation de f sur un « intervalle I » inclus dans l'ensemble de définition.

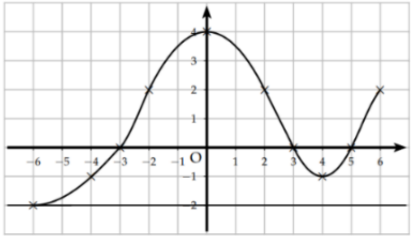
✐**Définition n°9** : **monotonie d'une fonction**

CONSERVATION DE L'ORDRE : une fonction croissante sur I **conserve l'ordre** entre x_1 et x_2 et leurs images : $f(x_1)$ et $f(x_2)$: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

INVERSION DE L'ORDRE : une fonction décroissante sur I **inverse l'ordre** entre x_1 et x_2 et leurs images : $f(x_1)$ et $f(x_2)$: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

⚐ **Remarque** : le plus souvent, on résume le sens de variation dans un « **tableau de variation** ».

Exemple : dresser le tableau de variation de la fonction ci-contre.



Application de la dérivation au sens de variation d'une fonction : au lycée, il ne vous a pas échappé que le sens de variation d'une fonction est intimement lié au signe de sa dérivée.

✍**Proposition** : **monotonie et signe de la dérivée**

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I avec

- f'(x) **est nulle** alors f est constante sur I,
- f'(x) **positive** alors f est croissante sur I,
- f'(x) **négative** alors f est décroissante sur I,

Exercice n°23 : après avoir déterminé leur domaine de définition, dresser le tableau de variation complet de chacune des fonctions ci-après : $f(x) = 1/3\ x^3 + 2x^2 - 5x + 1$, $g(x) = \frac{x^2-5}{x-3}$, $h(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 10$.

Indication : on montrera que $h'(x) = (x - 1)(4x^2 + 13x + 3)$.

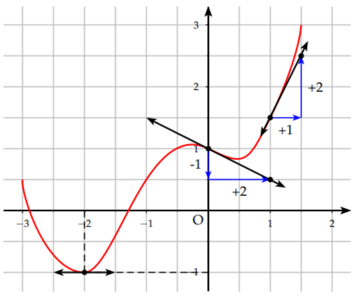
Exercice n°24 : montrer, à l'aide d'un tableau de variation que la fonction $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ est bornée.

✐**Définition n°10** : si la fonction f est dérivable en a alors le « **nombre dérivé** » de f en a noté f'(a)

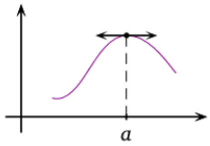
n'est autre que **le coefficient directeur de la tangente** T_a à C_f au point A(a ; f(a)).

Dans ce cas, la tangente T_a a pour équation : $y = \mathbf{f'(a)}\ (x - a) + f(a)$.

Exemple : déterminer une équation des tangentes ci-contre.



☠ f dérivable en a avec $f'(a) = 0$ revient à dire que C_f possède une tangente « **horizontale** » au point $A(a\ ;\ f(a))$.



Exercice 25 : considérons la fonction $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 48x + 4$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1. Le graphe de f possède-t-il des tangentes horizontales ?
2. Déterminer si le graphe de g possède des points en lesquels la tangente est parallèle à la droite $D : y = -3x + 7$.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice n°1

$A = 2x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 3$
$B = 4 - 4x + x^2$
$C = (9x^2 + 6x + 1) - (x^2 + 4x + 4) = 8x^2 + 2x - 3$
$D = 1 + 2x + x^2 + 1 - x^2 = 2 + 2x$
$E = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ab + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$F = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exercice n°2

$A = (x+2)[(3x^2+1) - (x+1)] = (x+2)(3x^2 + 1 - x - 1) = (x+2)(3x^2 - x) = x(x+2)(3x-1)$
$B = (x-4)(x+4) + 3(x-4) = (x-4)[(x+4)+3] = (x-4)(x+7)$
$C = (x-1)(x-1) - (x-1)(x+3) = (x-1)[(x-1)-(x+3)] = (x-1)(x-1-x-3) = -4(x-1)$

Exercice n°3

1. Pour tout réel x, $\frac{x+1}{x^2-4}$ existe $\Leftrightarrow$ x² - 4 $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ x² $\neq$ 4 $\Leftrightarrow$ x $\neq \pm$ 2. L'expression $\frac{x+1}{x^2-4}$ est donc définie pour x $\in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. De même, pour tout réel x, $\frac{\sqrt{x}}{x-5}$ existe $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}$ existe et x - 5 $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ x $\geq$ 0 et x $\neq$ 5. L'expression $\frac{\sqrt{x}}{x-5}$ est donc définie pour x $\in [0\,;5[\cup]5;+\infty[$.
2. Pour x $\neq$ 1, $3 \times \frac{2x+7}{x-1} = \frac{6x+21}{x-1}$
3. Pour $\in \mathbb{R}$, (x - 1)(x + 5) = x² + 4x - 5 et (x - 1)(x - 2) = x² - 3x + 2.

L'expression $\frac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2}$ existe $\Leftrightarrow$ x² - 3x + 2 $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ (x - 1)(x - 2) $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ x $\neq$ 1 et x $\neq$ 2.
Par suite, pour $x \in \mathbb{R} - \{1,2\}$, $\frac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+5}{x-2}$.

4. **Mise au même dénominateur**

   4a. Pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{x+3}{x-1}$

   4b. Pour $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x} = \frac{x^2+3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x^2+3x-3}{x(x-1)}$.

   4c. Pour $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \times x + 3x(x-1) + (x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{x^3+3x^2-2x-1}{x^2(x-1)}$

Exercice n°4 : le domaine de définition de chaque équation est $\mathbb{R}$.

1. 3x + 6 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -2 donc S = {-2}
2. -x + 5 = 4x + 2 $\Leftrightarrow$ -5x = -3 $\Leftrightarrow$ x = 3/5 donc S = {3/5}
3. x² + x +2 = (x - 1)(x + 2) $\Leftrightarrow$ x² + x + 2 = x² + x - 2 $\Leftrightarrow$ 2 = - 2 ce qui est impossible donc S = $\emptyset$
4. x² + x = x(x + 1) $\Leftrightarrow$ x² + x = x² + x ce qui est toujours vraie donc S = $\mathbb{R}$

Exercice n°5 : le domaine de définition de chaque équation est $\mathbb{R}$.

2x² + x - 6 = 0 : le discriminant vaut : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{49}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Finalement, S = {-2 , 3/2}.
x² - 4x + 4 = 0 : le discriminant vaut : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$ donc l'équation possède une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$. Finalement, S = {2}.
Autre méthode (meilleure) : x² - 4x + 4 = 0 $\Leftrightarrow$ (x - 2)² = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2 et donc S = {2}.
x² + x + 1 = 0 : le discriminant vaut : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle. Finalement, S = $\emptyset$

Exercice n°6 : le domaine de définition de chaque équation est $\mathbb{R}$.

x² + mx + 1 = 0 : le discriminant vaut : $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 1 = m^2 - 4$.

- ✓ **1er cas** : m² - 4 = 0 $\Leftrightarrow$ m = 2 ou m = -2 alors l'équation possède une unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a} = -\frac{m}{2}$

Si m = 2 alors x_0 = -1 donc S = {-1}.
Si m = -2 alors x_0= 1 et S = {1}.

- ✓ **2ième cas** : m² - 4 < 0 $\Leftrightarrow$ -2 < m < 2 et l'équation n'a pas de solution réelle. Finalement, S = $\emptyset$.
- ✓ **3ième cas** : m² - 4 > 0 $\Leftrightarrow$ m < -2 ou m > 2 alors l'équation possède deux solutions réelles distinctes. $x_1 = \frac{-m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ et $x_2 = \frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}$. Finalement, S = $\{\frac{-m-\sqrt{m^2-4}}{2}, \frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}\}$.

Exercice n°7 : le domaine de définition de chaque équation est $\mathbb{R}$.

$x^2 + 6 = 0 \iff x^2 = -6$. Cette dernière équation ne possède pas de solution réelle car $-6 < 0$. D'où : $S = \emptyset$.

$x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$ et donc $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

$(2x - 3)^2 = 25 \iff (2x - 3)^2 = 25 \iff (2x - 3)^2 = 5^2 \iff 2x - 3 = 5$ ou $2x - 3 = -5 \iff 2x = 8$ ou $2x = -2$

$\iff x = 4$ ou $x = -1$. Finalement, $S = \{4, -1\}$.

Exercice n°8 : le domaine de définition de chaque équation est $\mathbb{R}$.

$x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \underbrace{\iff}_{X=x^2} X^2 - 8X + 7 = 0$: le discriminant vaut : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 36 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles : $X_1 = \frac{8-\sqrt{36}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{8+\sqrt{36}}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

- ✓ **1^er^ cas** : $X = 1 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$
- ✓ **2^ième^ cas** : $X = 7 \iff x^2 = 7 \iff x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

Finalement, $S = \{-1, 1, \sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$.

$x^4 + x^2 - 6 = 0 \underbrace{\iff}_{X=x^2} X^2 + X - 6 = 0$: le discriminant vaut : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles : $X_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

- ✓ **1^er^ cas** : $X = -3 \iff x^2 = -3$ ce qui est impossible cas $-3 < 0$.
- ✓ **2^ième^ cas** : $X = 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

Finalement, $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Exercice n°9 : le domaine de définition de chaque équation est $\mathbb{R}$.

$(x-1) + (x+4)(x-1)^2 = 0 \iff (x-1)[(x + (x+4)(x-1)] = 0 \iff (x-1)(x + x^2 - x + 4x - 4) = 0$
$\iff (x-1)(x^2 + 4x - 4) = 0 \underbrace{\iff}_{PPN} x - 1 = 0 \; ou \; x^2 + 4x - 4 = 0.$

La première équation a pour solution $x = 1$.

Le discriminant de la deuxième vaut : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 32 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-4-\sqrt{32}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{32}}{2} = \frac{-4+4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$.

Finalement, $S = \{1, -2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\}$.

$x^2(x+1) = x(x^2-1)(2x+1) \iff x(x+1)[x - (x-1)(2x+1)] = 0 \iff x(x+1)(2x^2 + 2x + 1) = 0$
$\underbrace{\iff}_{PPN} x = 0 \; ou \; x + 1 = 0 \; ou \; 2x^2 + 2x + 1 = 0.$

La première équation a pour solution $x = 0$

La deuxième équation a pour solution $x = -1$

Le discriminant de la troisième vaut : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle.

Finalement, $S = \{0, -1\}$.

$3(x+1)(x+3) = (x+3)^2 \iff (x+3)[3(x+1) - (x+3)] = 0 \iff (x+3)(2x) = 0$
$\underbrace{\iff}_{PPN} x + 3 = 0 \; ou \; 2x = 0 \iff x = -3 \; ou \; x = 0$. Finalement, $S = \{0, -3\}$.

Exercice n°10

L'équation $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3$ est définie pour $x + 2 \neq 0$ et $x \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-2,0\}$.

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-2,0\}$, $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3 \iff \frac{x^2+2(x+2)}{x(x+2)} = -3 \iff x^2 + 2x + 2 = -3x(x+2)$
$\iff x^2 + 2x + 2 = -3x^2 - 6x \iff 4x^2 + 8x + 2 = 0$: le discriminant vaut : $\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times 2 = 32 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-8-\sqrt{32}}{8} = \frac{-8-4\sqrt{2}}{8} = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$. Finalement, $S = \{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\}$.

L'équation $\frac{x-4}{x+4} = 0$ est bien définie pour $x + 4 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-4\}$.

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$, $\frac{x-4}{x+4} = 0 \iff x - 4 = 0 \iff x = 4$. Finalement, puisque $x = 4 \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$ alors $S = \{4\}$.

L'équation $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2}$ est bien définie pour $x + 1 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$.

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1\}$, $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2} \iff \frac{x+2}{x+1} + 4 - \frac{5x}{x+2} = 0 \iff \frac{(x+2)^2+4(x+1)(x+2)-5x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = 0$
$\iff (x+2)^2 + 4(x+1)(x+2) - 5x(x+1) = 0 \iff x^2 + 4x + 4 + 4(x^2 + 2x + x + 2) - 5x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+4x^2+12x+8-5x^2-5x=0 \Leftrightarrow 11x+12=0 \Leftrightarrow x=-\frac{12}{11}$

Finalement, puisque $x=-\frac{12}{11}\in\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$ alors $S=\left\{-\frac{12}{11}\right\}$.

Exercice n°11 : les inéquations sont polynômiales de degré 1 et elles ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour $x\in\mathbb{R}, 2x+1<0 \Leftrightarrow 2x<-1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$ et donc $S=]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$.

Pour $x\in\mathbb{R},\ -6x+3\leq 0 \Leftrightarrow -6x\leq -3 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$ et donc $S=[\frac{1}{2};+\infty[$.

Exercice n°12 : les inéquations polynômiales de degré 2 et elles ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

$x^2+x+1<0$: le discriminant du premier trinôme vaut : $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$ donc il ne possède pas de racine réelle et il est toujours du signe de $a=1$ donc positif. Par suite, $S=\emptyset$.

$x^2+3x-4\leq 0$: le discriminant du deuxième trinôme vaut : $\Delta=3^2-4\times1\times(-4)=25>0$ donc il possède deux racines réelles : $x_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{2}=\frac{-3-5}{2}=-4$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{2}=\frac{-3+5}{2}=1$.

Le trinôme est du signe de $-a=-1<0$ entre les racines donc $S=[-4\,;1]$.

Exercice n°13 : l'inéquation : $mx^2+4x+1\geq 0$ a pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Traitons le cas particulier où m = 0 car dans ce cas, on a un inéquation de degré 1 : $4x+1\geq 0$ qui a pour ensemble solution S =]-1/4 ; +∞[.

Dans la suite, on considère m non nul. Le discriminant vaut : $\Delta=4^2-4\times m\times 1=16-4m$.

- ✓ **1er cas** : $16-4m\leq 0 \Leftrightarrow 4\leq m$ alors le trinôme est toujours du signe de a = m = 4 donc positif donc S = $\mathbb{R}$.
- ✓ **2ième cas** : $16-4m>0 \Leftrightarrow m<4$: le trinôme possède deux racines réelles distinctes.

$x_1=\frac{-4-\sqrt{16-4m}}{2m}=\frac{-1-\sqrt{4-m}}{m}$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{4-m}}{m}$.

1er sous cas : $0<m<4$ alors $x_1<x_2$ et le trinôme est du signe de a = m positif en dehors des racines donc S = $]-\infty\,;\frac{-1-\sqrt{4-m}}{m}]\cup[\frac{-1+\sqrt{4-m}}{m}\,;+\infty[$.

2ième sous cas : $m<0$ alors $x_2<x_1$ et le trinôme est du signe de - a = - m positif entre les racines donc S = $[\frac{-1+\sqrt{4-m}}{m}\,;\,\frac{-1-\sqrt{4-m}}{m}]$.

Exercice n°14 : les inéquations polynômiales de degré 2 et elles ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

$x^2-6\leq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 6$ qui a pour solutions S = $[-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}]$.

$x^2+2x<2(x+2) \Leftrightarrow x^2+2x<2x+4 \Leftrightarrow x^2<4$ qui a pour solutions S = $]-2\,;2[$.

$2x^2\geq(x+1)^2-2x \Leftrightarrow 2x^2\geq x^2+2x+1-2x \Leftrightarrow x^2\geq 1$ qui a pour solution S = $]-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty[$.

Exercice n°15 : les inéquations $(2x+1)(x+7)(x-3)\geq 0$ et $2x(x+1)^2<(1-3x)(x+1)^2$ ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour la première, on dresse un tableau de signes.

x	$-\infty$		-7		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=[-7\,;-\frac{1}{2}]\cup[3\,;+\infty[$.

Pour la seconde, on a : $2x(x+1)^2 < (1-3x)(x+1)^2 \Leftrightarrow 2x(x+1)^2 - (1-3x)(x+1)^2 < 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2[(2x-(1-3x)] < 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(2x-1+3x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(5x-1) < 0.$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$-$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,\frac{1}{5}[$.

L'inéquation $\frac{x-4}{x+4} > 0$ est bien définie pour $x+4 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-4\}$.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
quotient		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-4[\cup]-4\,;\,+\infty[$.

L'inéquation $\frac{x+2}{x+1} + 4 \leq \frac{5x}{x+2}$ est bien définie pour $x+1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, $\frac{x+2}{x+1} + 4 \leq \frac{5x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} + 4 - \frac{5x}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+4(x+1)(x+2)-5x(x+1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{11x+12}{(x+1)(x+2)} \leq 0$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{12}{11}$		-1		$+\infty$
$11x+12$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
quotient		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

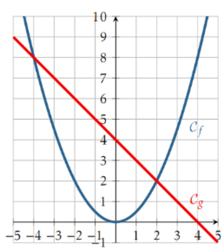
$S =]-\infty\,;\,-2[\cup[-\frac{12}{11}\,;\,-1[$.

<u>Exercice n°16</u> : ensemble de définition

La fonction $x \mapsto 2x^3 + 4x - 2$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
La fonction $x \mapsto \frac{2x+4}{x^2-x}$ est une fonction rationnelle définie pour $x^2 - x$ non nul soit $x(x-1)$ non nul donc définie sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.
La fonction $x \mapsto x + \ln(x)$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ car $\ln(x)$ existe pour $x > 0$.
La fonction $x \mapsto x^2e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions.
La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(x-2)(x-4)}$ est le quotient d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une fonction polynôme donc elle est définie pour $(x-2)(x-4)$ non nul soit sur $\mathbb{R} - \{2, 4\}$.
La fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ est définie pour $x^2 - 1 > 0$ soit $x^2 > 1$ donc sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{-x+5}$ est définie pour $-x+5$ positif soit $x \leq 5$ donc elle est définie sur $]-\infty\,;5]$.

<u>Exercice n°17</u> : considérons les fonctions $f(x) = ½\,x^2$ et $g(x) = -x + 4$.

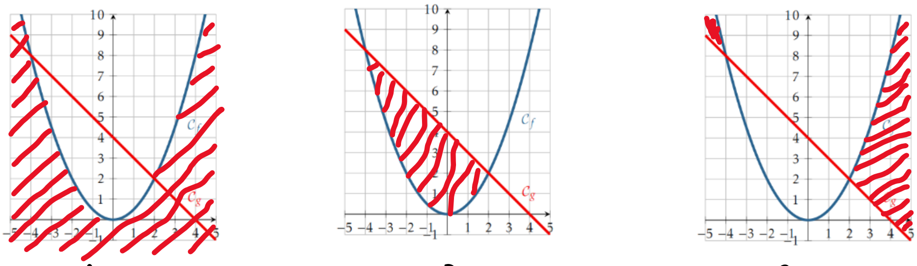
1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \in \{-4, 2\}$: intersection de la droite et de la parabole.
$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,;\,-4[\cup]2\,;+\infty[$: parabole au-dessus de la droite.
$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in\,]-4\,;\,2[$: parabole en dessous de la droite.



2) Pour tout réel x, f(x) – g(x) = ½ x² - (-x + 4) = ½ x² + x - 4 : $\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-4) = 9 > 0$ donc le trinôme possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{1} = -4$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{1} = 2$.

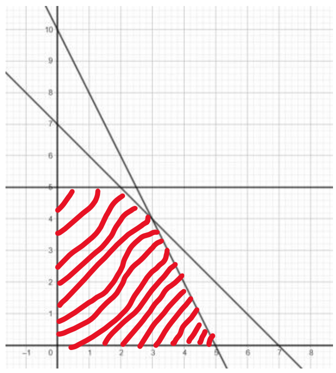
x	$-\infty$ $\quad -4 \quad$ 2 $\quad +\infty$		
f(x) – g(x)	+	0 $\quad -\quad$ 0	+
Position relative	C_f au-dessus de C_g	C_f en dessous de C_g	C_f au-dessus de C_g

3) Coloriage : régionnement du plan



Exercice n°18

La condition x ≥ 0 nous dit de considérer le demi-plan à droite de l'axe des ordonnées.
La condition 0 ≤ y ≤ 5 nous de considérer les points situés dans une bande horizontale délimitée par l'axe des abscisses et la droite d'équation y = 5.
La condition x + y ≤ 7 nous de considérer le demi-plan délimité par la droite D : y = -x + 7 contenant l'origine (qui vérifie l'inéquation).
La condition 2x + y ≤ 10 nous dit de considérer le demi-plan délimité par la droite D' : y = - 2x + 10 contenant l'origine (qui vérifie l'inéquation).



Exercice n°19

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ x³ + 4x + 7 = $\lim\limits_{x\to+\infty}$ x³ = +∞ alors que : $\lim\limits_{x\to-\infty}$ x³ + 4x + 7 = $\lim\limits_{x\to-\infty}$ x³ = -∞ car la limite d'un polynôme au voisinage de l'infini est la limite de son terme de plus haut degré.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+7} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ car la limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exercice n°20

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ donc le graphe de cette fonction possède une asymptote horizontale d'équation y = 2 au voisinage de plus et moins l'infini.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et ainsi le graphe de cette fonction possède une asymptote horizontale d'équation y = 1 au voisinage de plus l'infini.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = -1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et ainsi le graphe de cette fonction possède une asymptote horizontale d'équation y = -1 au voisinage de moins l'infini.

Exercice n°21

La fonction f(x) = $\frac{2x^2-x}{x-2}$ est rationnelle. Elle est définie pour x – 2 non nul donc D_f = ℝ - {2}.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x^2-x}{x-2} = "\frac{6}{0^-}"$ = -∞ tandis que : $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2x^2-x}{x-2} = "\frac{6}{0^+}"$ = +∞. On en déduit que le graphe de cette fonction possède une asymptote verticale d'équation x = 2.

La fonction g(x) = $\frac{e^x+1}{x^2}$ est définie pour x² non nul donc D_g = ℝ - {0}.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x+1}{x^2} = "\frac{2}{0^+}"$ = +∞. On en déduit que le graphe de cette fonction possède une asymptote verticale d'équation x = 0.

Exercice n°22

La fonction f est définie sur ℝ comme produit d'une fonction polynôme par la fonction exponentielle toutes deux définies sur ℝ.

$\lim\limits_{x \to +\infty}$ (x² -5x+7) = $\lim\limits_{x \to +\infty}$ x² = +∞ et $\lim\limits_{x \to +\infty}$ e^x = +∞ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty}$ f(x) = +∞

$\lim\limits_{x \to -\infty}$ (x² -5x+7) = $\lim\limits_{x \to -\infty}$ x² = +∞ et $\lim\limits_{x \to -\infty}$ e^x = 0 donc on est face à une forme indéterminée (FI) : « $0 \times \infty$ »

Cependant, le théorème de croissances comparées nous dit que l'exponentielle emporte la bataille et donc $\lim\limits_{x \to +\infty}$ f(x) = +∞.

La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ comme différence de la fonction ln et d'une polynôme.

$\lim\limits_{x \to +\infty}$ (ln(x)) = +∞ et $\lim\limits_{x \to +\infty}$ x = +∞ donc par différence, on est face à une forme indéterminée (FI) : « $\infty - \infty$ ». On écrit alors : $\lim\limits_{x \to +\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\frac{\ln(x)}{x} - 1)$.

Le théorème de croissances comparées nous dit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, par différence et par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty}$ g(x) = - ∞.

$\lim\limits_{x \to 0}$ (ln(x)) = -∞ et $\lim\limits_{x \to 0}$ x = 0 donc par différence, on a : $\lim\limits_{x \to 0}$ g(x) = -∞ .

Exercice n°23

f est définie et dérivable sur ℝ comme fonction polynôme et f'(x) = x²+4x-5 : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$ donc le trinôme possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = 1$.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f	-∞	↗	103/3	↘	-5/3	↗	+∞

$\lim\limits_{x \to +\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x \to +\infty}$ 1/3 x³ = +∞ alors que : $\lim\limits_{x \to -\infty}$ f(x) = $\lim\limits_{x \to -\infty}$ 1/3 x³ = -∞.

La fonction g(x) = $\frac{x^2-5}{x-3}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$ comme fonction rationnelle et

g'(x) = $\frac{2x(x-3)-(x^2-5)}{(x-3)^2}$ = $\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$ est du signe de son numérateur.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 > 0$ donc le trinôme possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{6-\sqrt{16}}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{6+\sqrt{16}}{2} = 5$.

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
g'		+	0	-	||	-	0	+	
g	-∞	↗	2	↘	- ∞ || +∞	↘	10	↗	+∞

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-5}{x-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-5}{x-3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^2-5}{x-3} = \text{"}\frac{4}{0^-}\text{"} = -\infty$ tandis que : $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x^2-5}{x-3} = \text{"}\frac{4}{0^+}\text{"} = +\infty$.

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $h'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3$.
D'autre part, $(x-1)(4x^2 + 13x + 3) = 4x^3 + 13x^2 + 3x - 4x^2 - 13x - 3 = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3 = h'(x)$.

$4x^2+13x+3$: $\Delta = 13^2 - 4 \times 4 \times 3 = 121 > 0$ donc le trinôme possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-13-\sqrt{121}}{8} = -3$ et $x_2 = \frac{-13+\sqrt{121}}{8} = -\frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		-3		$-1/4$		1		$+\infty$
x-1		-		-		-	0	+	
$4x^2+13x+3$		+	0	-	0	+		+	
f'		-	0	+	0	-	0	+	
f	$+\infty$	↘	-20	↗	2661/256	↘	6	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^4 = +\infty$

Exercice n°24

La fonction $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $f'(x) = \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x-3)^2}$ est du signe de son numérateur.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		-	0	+	0	$-$	
f	0	↘	-1	↗	1	↘	0

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0.$

D'après le tableau de variation ci-dessus, on peut dire que : pour tout réel x, $-1 \leq f(x) \leq 1$ ce qui nous dit que la fonction f est bornée entre -1 et 1.

Exercice 25 : considérons la fonction $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 48x + 4$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $f'(x) = 6x^2+18x-48$.

Dans ce cas, $f'(x) = 0 \iff 6x^2+18x-60=0 \iff x^2 + 2x - 8 = 0$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 > 0$ donc le trinôme possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2} = 2$.

On en déduit que le graphe de f possède des tangentes horizontales aux points d'abscisses x = -4 et x = 2.

2) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$ comme fonction rationnelle. De plus, pour $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $g'(x) = \frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$.

Si on note T la tangente au graphe de g au point d'abscisse x alors dire que T est parallèle à la droite D : y = -3x + 7 signifie que g'(x) = -3 car deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

Par suite, $g'(x) = -3 \iff -\frac{3}{(x-2)^2} = -3 \iff = \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \iff (x-2)^2 = 1 \iff x-2 = 1$ ou $x-2 = -1 \iff x = 3$ ou $x = 1$.

Ainsi, aux points d'abscisses x = 3 et x = 1, la tangente au graphe est parallèle à la droite D.