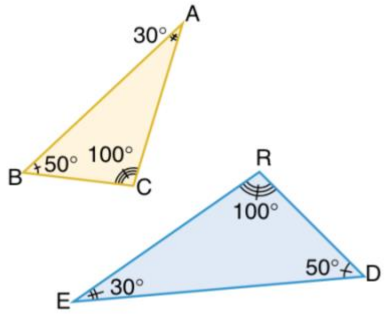
Chapitre 16 : Triangles semblables

Rappel : Deux triangles sont égaux s'ils ont :
- leurs trois côtés deux à deux de même longueur (« CCC »)
- un côté de même longueur compris entre deux angles deux à deux de même mesure
- un même angle compris entre deux côtés deux à deux de même longueur

I. Triangles semblables : angles

Définition : Deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure sont dits semblables.

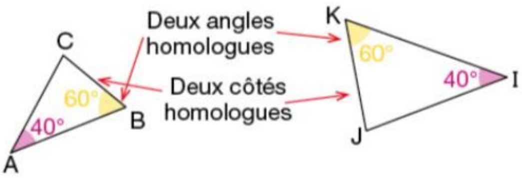
Exemple : Les triangles ABC et EDR sont semblables.
- Les côtés [AB] et [ED], [AC] et [ER], [BC] et [RD] sont homologues.
- Les sommets A et E, B et D, C et R sont homologues.



Propriété : Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces triangles sont semblables.

Preuve : La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Le 3ème angle de chaque triangle vaut donc 180°- la somme des deux autres angles.

Exemple :
On sait que : Dans le triangle ABC, $\widehat{BAC} = 40°$ et $\widehat{ABC} = 60°$
Dans le triangle IJK, $\widehat{JIK} = 40°$ et $\widehat{IKJ} = 60°$
Propriété : Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces triangles sont semblables.
Donc : ABC et IJK sont semblables.



Remarque : La somme des angles d'un triangle vaut 180°, donc :
- $\widehat{ACB} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 180° - 40° - 60° = 80°$
- $\widehat{IJK} = 180° - \widehat{JIK} - \widehat{JKI} = 180° - 40° - 60° = 80°$

On a bien $\widehat{ACB} = \widehat{IJK}$.

II. Triangles semblables : longueurs

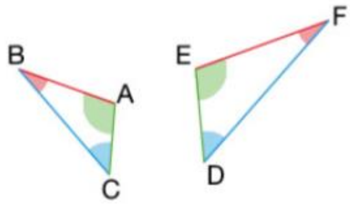
Rappel : Lorsqu'on agrandit ou réduit une figure, les longueurs de la figure obtenue sont proportionnelles aux longueurs de la figure de départ.

Propriété : Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

<u>Exemple :</u>
On sait que les triangles ABC et DEF sont semblables.
Propriété : Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.
Donc : Il existe un nombre k, non nul, tel que :

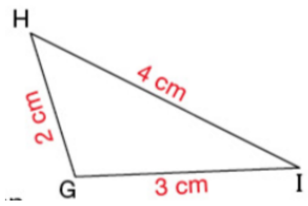
$$EF = k \times AB$$
$$ED = k \times AC$$
$$DF = k \times BC$$

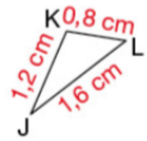
Ce qui se traduit par : $\frac{EF}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{DF}{BC} = k$



<u>Propriété :</u> Si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles, alors ces deux tri angles sont semblables.

<u>Exemple :</u>
On sait que : $\frac{GH}{KL} = \frac{GI}{JK} = \frac{HI}{JL} = 2{,}5$
Propriété : Si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés deux à deux proportionnelles, alors ces deux tri angles sont semblables.
Donc : GHI et JKL sont semblables.





Le triangle GHI est un agrandissement du triangle JKL dans le rapport 2,5.

<u>Remarque :</u> Configuration de Thalès :
On sait que : Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
Or d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Donc les triangles AMN et ABC sont semblables.